SUR LES OPÉRATIONS LINÉAIRES*

(DEUXIÈME NOTE†)

PAR

MAURICE FRÉCHET

Nouvelles représentations d'une opération linéaire.

Remarque sur le théorème de M. Hadamard. D'après ce théorème, toute opération linéaire U_f portant sur une fonction $f(x)$ continue entre a et b peut se mettre sous la forme

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n(y) f(y)\, dy,$$

où les $K_n(y)$ sont des fonctions continues entre a et b. Il nous sera utile d'observer qu'on peut même supposer que les fonctions K_n soient nulles en a et b. Il suffit de remplacer $K_n(y)$ par $K_n(y) + T_n(y)$ en appelant $T_n(y)$ une fonction continue nulle de $a + \epsilon_n$ à $b - \epsilon_n$ et égale à

$$\frac{y - a - \epsilon_n}{\epsilon_n} K_n(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{b - \epsilon_n - y}{\epsilon_n} K_n(b)$$

dans les intervalles respectifs $(a, a + \epsilon_n)$, $(b - \epsilon_n, b)$. En prenant, par exemple

$$\epsilon_n = \frac{1}{n(|K_n(a)| + 1)(|K_n(b)| + 1)},$$

on voit que l'on a

$$\left| \int_{b-\epsilon_n}^b \frac{b\epsilon_n - y}{\epsilon_n} K_n(b)\, dy \right| = \frac{|K_n(b)|}{2n(|K_n(a)| + 1)(|K_n(b)| + 1)} < \frac{1}{2n}.$$

Par suite, l'intégrale

$$\int_{b-\epsilon_n}^b T_n(y)\, dy$$

tend vers 0 avec $1/n$ et il en est de même de

$$\int_a^b T_n(y)\, dy.$$

---

* Presented to the Society December 29, 1904. Received for publication December 2, 1904.

† Voir Transactions of the American Mathematical Society, vol. 5 (1905), pp. 493–499. Nous conservons ici les mêmes notations.

On peut aussi supposer que les $K_n(y)$ soient des polynomes. En effet puisque ce sont des fonctions continues, on peut trouver pour chaque valeur de n un polynome $P_n(y)$ tel que l'on ait, entre a et b,

$$|P_n(y) - K_n(y)| < \frac{1}{n}.$$

Et l'on aura

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b P_n(y) f(y) dy = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n(y) f(y) dy = U_f.$$

Mais on ne pourra pas toujours supposer en même temps que $P_n(y)$ soit nul en a et b.

La remarque précédente nous fournit un nouveau développement de l'opération linéaire la plus générale portant sur une fonction continue. En effet, posons

$$P_n(y) = a_0^n + a_1^n y + \cdots + a_{p_n}^n y^{p_n}.$$

On aura

(21) $$U_f = \lim_{n=\infty} \left[a_0^n U_f^{(0)} + a_1^n U_f^{(1)} + \cdots + a_{p_n}^n U_f^{(p_n)} \right],$$

avec

(22) $$U_f^{(r)} = \int_a^b y^r f(y) dy.$$

On peut obtenir un autre développement en s'appuyant sur ce que toute fonction continue entre 0 et 1 peut être représentée par le développement uniformément convergent

$$f(y) = \lim_{n=\infty} \left[R_{0,n}(y) f(0) + \cdots R_{r,n}(y) f\left(\frac{r}{n}\right) + \cdots + R_{n,n}(y) f\left(\frac{n}{n}\right) \right],$$

où les $R_{r,n}(y)$ sont certains polynomes déterminés indépendamment de la fonction f.* De sorte qu'en appliquant l'opération U terme à terme dans le cas où $a = 0$, $b = 1$, l'on aura

(23) $$U_f = \lim_{n=\infty} \left[b_0^n f(0) + \cdots + b_r^n f\left(\frac{r}{n}\right) + \cdots + b_n^n f\left(\frac{n}{n}\right) \right],$$

les nombres

$$b_r^n = \int^b f(y) R_{r,n}(y) dy$$

restant indépendants de la fonction $f(y)$.

Cette représentation de l'opération U_f est intéressante en ce qu'elle donne un procédé pour calculer effectivement U_f connaissant seulement les valeurs de $f(y)$ en tous les points de l'ensemble E des points d'abscisses commensurables.

* Voir E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 80, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

On pourrait d'ailleurs l'étendre au cas où E est un ensemble dénombrable partout dense entre 0 et 1.

Mais les deux développements (21) et (23) ont l'inconvénient de ne pas être chacun seul de son espèce: autrement dit, les coefficients a_r^n, b_r^n ne sont pas déterminés d'une façon unique par l'opération U_f. Ainsi, par exemple, la formule (23) subsisterait en remplaçant les b_r^n par les quantités $b_r^n + d_r^n/n^2$ pourvu que les nombres arbitraires d_r^n soient bornés dans leur ensemble.

Au contraire, *le développement* (4')* *en série indéterminée n'est valable que pour une suite de valeurs* $u_0, u_1, \cdots$ *bien déterminées par l'opération* U_f, comme on s'en assure facilement.

Décomposition d'une opération linéaire, correspondant à une décomposition de l'intervalle.

Soit c un nombre quelconque compris entre a et b et soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions continues définies de la façon suivante: $f(x)$ étant une fonction continue de a à b qui coïncide avec $f_1(x)$ de a à c et avec $f_2(x)$ de c à b, nous prendrons

$$\phi_1(x) = f(x) - \tfrac{1}{2} f(c) \text{ de } a \text{ à } c, \qquad \phi_1(x) = \tfrac{1}{2} f(c) \text{ de } c \text{ à } b,$$

puis

$$\phi_2(x) = f(x) - \phi_1(x).$$

Alors, on aura

$$U_f = U_{\phi_1} + U_{\phi_2}.$$

Or la fonction continue ϕ_1 est déterminée connaissant seulement la fonction $f_1(x)$ entre a et c. Donc U_{ϕ_1} peut être considérée comme une opération fonctionnelle V_{f_1} portant sur la fonction continue $f_1(x)$ définie entre a et c. De plus, on voit facilement que cette opération V_{f_1} est distributive et continue, c'est à dire linéaire. *On pourra ainsi écrire*

$$U_f \equiv V_{f_1} + W_{f_2}, \tag{24}$$

V et W étant deux opérations linéaires définies respectivement dans les intervalles (a, c), (c, b).

Étant donnée une telle décomposition, on peut en trouver immédiatement une infinité d'autres: il suffit de remplacer respectivement V_{f_1} et W_{f_2} par $V_{f_1} + Af_1(c)$ et $W_{f_2} - Af_2(c)$, A étant une constante arbitraire. Il n'y a pas d'autres décompositions. Autrement dit, *si* v_{f_1}, V_{f_1} *et* w_{f_2}, W_{f_2} *sont des opérations linéaires définies respectivement dans les intervalles* (a, c) *et* (c, b) *et telles que l'on ait*

$$U_f \equiv v_{f_1} + w_{f_2} \equiv V_{f_1} + W_{f_2},$$

on a nécessairement

$$v_{f_1} \equiv V_{f_1} + Af(c), \qquad w_{f_2} \equiv W_{f_2} - Af(c),$$

*Transactions, loc. cit., p. 496.

A étant une constante arbitraire. En effet, les deux membres de l'identité évidente

$$v_{f1} - V_{f1} = W_{f2} - w_{f2}$$

représentent une même opération qui ne varie pas quand on remplace f_1 et f_2 par deux fonctions continues quelconques ayant en c la valeur $f(c)$. Par conséquent, cette opération est une fonction de $f(c)$, au sens ordinaire: soit, $G[f(c)]$. Et comme on doit avoir

$$G[f(c)] + G[F(c)] = G[f(c) + F(c)],$$

G est nécessairement de la forme $Af(c)$.

Comme on a

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n(y) f(y) dy,$$

on serait tenté de dire que l'une des décompositions précédentes est fournie par les formules,

$$(25) \qquad v_{f1} = \lim_{n=\infty} \int_a^c K_n f_1 dy \qquad w_{f2} = \lim_{n=\infty} \int_c^b K_n f_2 dy.$$

Mais cette conclusion serait prématurée, car il n'est pas certain que les seconds membres de (25) soient convergents. Cependant, nous allons montrer qu'on peut toujours choisir les fonctions K_n *continues de a à b* de façon à ce qu'il en soit ainsi. En effet; soit

$$U_f = V_{f1} + W_{f2}$$

l'une des décompositions possibles de U_f. D'après notre première remarque, on peut trouver des fonctions $H_n(y)$, $L_n(y)$ respectivement continues dans (a, c) et (c, b) *mais nulles en c*, de façon que l'on ait

$$V_{f1} = \lim_{n=\infty} \int_a^c H_n f_1 dy, \qquad W_{f2} = \lim_{n=\infty} \int_c^b L_n f_2 dy.$$

Or la fonction $K_n(y)$ qui coïncide avec H_n de a à c et avec L_n de c à b *est continue de a à b* et telle que l'on ait

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n f dy,$$

—ce qui démontre la proposition.

On généralise immédiatement ce qui précéde au cas où l'on diviserait l' intervalle (a, b) en un nombre fini quelconque d'intervalles contigus.

Etant donnée une opération fonctionnelle *continue* U_f quelconque portant sur la fonction $f(x)$ continue entre a et b, on ne peut pas toujours la mettre sous la forme d'une somme de deux opérations *continues* V_{f_1}, W_{f_2}, déterminées quand on connait les valeurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de $f(x)$ dans les intervalles (a, c), (c, b).

Mais il ne faudrait pas croire cependant que les opérations *linéaires* sont les seules opérations continues qui jouissent de cette importante propriété. Soit par exemple, l'opération continue $U_f = [f(\alpha)]^2$ où α est un nombre fixe entre a et b. Appelons V_{f_1}, l'opération continue égale à $f_1^2(\alpha)$ si $\alpha \leqq c$, nulle si $\alpha > c$ et W_{f_2} l'opération continue égale à 0 dans le premier cas, à $f_2^2(\alpha)$ dans le second. On a $U_f = V_{f_1} + W_{f_2}$ et cependant l'opération U_f n'est pas linéaire.

Importance du champ fonctionnel dans lequel on définit une opération linéaire.

Nous avons supposé jusqu' ici que les opérations linéaires sur lesquelles nous raisonnions faisaient correspondre un nombre U_f à *toute* fonction $f(x)$ continue entre a et b et cela sans savoir si U_f était définie pour d'autres fonctions. Cette hypothèse est essentielle, comme nous allons le voir. Tout d'abord, observons que l'on peut construire des opérations linéaires définies pour toute fonction $f(x)$ *uniforme* entre a et b. Il suffit de prendre par exemple $U_f = f(a)$.

Pour donner un exemple plus général, considérons un ensemble dénombrable E de points entre a et b: $c_1, c_2, c_3, \cdots$ et soit

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$$

une série absolument convergente. L'opération

$$U_f = A_1 f(c_1) + \cdots + A_n f(c_n) + \cdots$$

sera définie et linéaire pour toute fonction $f(x)$ uniforme et bornée entre a et b.

Or, *on ne peut étendre à de telles opérations le théorème de* M. HADAMARD. En effet son énoncé même suppose qu'on peut calculer l'intégrale

$$\int_a^b K_n f dy;$$

il faut pour cela que f soit intégrable. Par conséquent, il ne peut avoir de sens que dans le champ des fonctions intégrables. Mais cette restriction n'est pas encore suffisante. *Étant donnée une opération linéaire U_f définie pour toute fonction sommable* $f(x)$ entre a et b, on ne peut pas toujours trouver une suite de fonctions mesurables et bornées $K_n(x)$ telles que l'on ait*

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n(y) f(y) dy. \tag{26}$$

(On voit que nous n'imposons même plus aux K_n la condition d'être continues). Il suffit pour le voir de prendre par exemple $U_f = f(a)$. Si l'on applique la formule (26) à la fonction sommable $f(x)$ qui est égale à 1 pour $x = a$ et nulle partout ailleurs, on arrive à une impossibilité.

* Voir LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 115.

D'ailleurs, il faut observer, inversement, que le théorème de M. HADAMARD n'est pas uniquement applicable dans le champ des fonctions continues; sa démonstration même est valable lorsque $f(x)$ n'a qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce, et c'est dans ce cas général qu'il avait été énoncé par son auteur.

Un autre genre de difficultés se présente quand on considère des opérations linéaires qui ne sont pas définies dans tout le champ des fonctions continues, comme l'opération $U_f = f'_c$. On peut être ainsi amené à considérer ce que nous appellerons des *opérations linéaires d'ordre* n, c'est à dire des opérations distributives portant seulement sur les fonctions ayant leurs n premières dérivées continues et telles que U_f ait pour limite U_ϕ lorsque f *et ses* n *premières dérivées* tendent uniformément vers ϕ et ses n premières dérivées.

Si U_f est une telle opération, le théorème de M. Hadamard lui est applicable et on peut même mettre U_f sous la forme suivante

$$U_f = A_0 f(a) + A_1 f'_a + \cdots + A_{n-1} f_a^{(n-1)} + \lim_{p=\infty} \int_a^b K_p f^{(n)} dy,$$

les A_i désignant certaines constantes et les K_p certaines fonctions continues de a à b. Il suffit pour le voir, d'appliquer l'opération U_f à chaque terme de l'identité

$$f(x) \equiv f(a) + (x-a) f'_a + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f_a^{(n-1)} + \int_a^x \cdots \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Au contraire, si l'on décompose (a, b) en deux intervalles, le raisonnement qui nous a conduit à établir la formule (24) n'est plus valable, car les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas dérivables jusqu'à l'ordre n. Mais le résultat est encore exact, si nous prenons de a à c

$$\phi_1(x) = f(x) - \tfrac{1}{2}\left[f(c) + (x-c) f'_c + \cdots + \frac{(x-c)^n}{n!} f_c^{(n)} \right]$$

et de c à b

$$\phi_1(x) = \tfrac{1}{2}\left[f(c) + (x-c) f'_c + \cdots + \frac{(x-c)^n}{n!} f_c^{(n)} \right];$$

puis $\phi_2 \equiv f - \phi_1$.

Seulement, si l'on a, entre des opérations linéaires d'ordre n, la relation

$$v_{f_1} + w_{f_2} \equiv V_{f_1} + W_{f_2},$$

on n'aura plus nécessairement

$$v_{f_1} - V_{f_1} = A f(c),$$

mais

$$v_{f_1} - V_{f_1} = A_0 f(c) + A_1 f'_c + \cdots + A_n f_c^{(n)},$$

$A_0, A_1, \cdots, A_n$ désignant certaines constantes.

Equations fonctionnelles. Il peut arriver que l'on ait à chercher les fonctions $\theta(x)$ telles que U_θ prenne une valeur donnée A. La solution est bien simple. Si nous supposons en effet, l'opération U non identiquement nulle dans le champ H des fonctions auxquelles elle s'applique, il existe au moins une fonction $\psi(x)$ de ce champ, non identiquement nulle entre a et b et telle que U_ψ soit différent de zéro. Il y a au moins une abscisse c de l'intervalle (a, b) qui n'annule pas $\psi(x)$. Ceci étant, il est extrêmement facile de voir qu'*on obtiendra toutes les racines $\theta(x)$ de l'équation $U_\theta = A$, chacune une fois et une seule, par la formule*

$$\theta(x) = f(x) + \frac{A - U_f}{U_\psi} \psi(x),$$

où $f(x)$ est remplacée successivement par toutes les fonctions distinctes, nulles en c, *du champ H.* Le raisonnement s'applique aussi bien quand le champ H est celui des fonctions continues entre a et b qu'aux opérations linéaires d'ordre quelconque.

PARIS, *Novembre*, 1904.